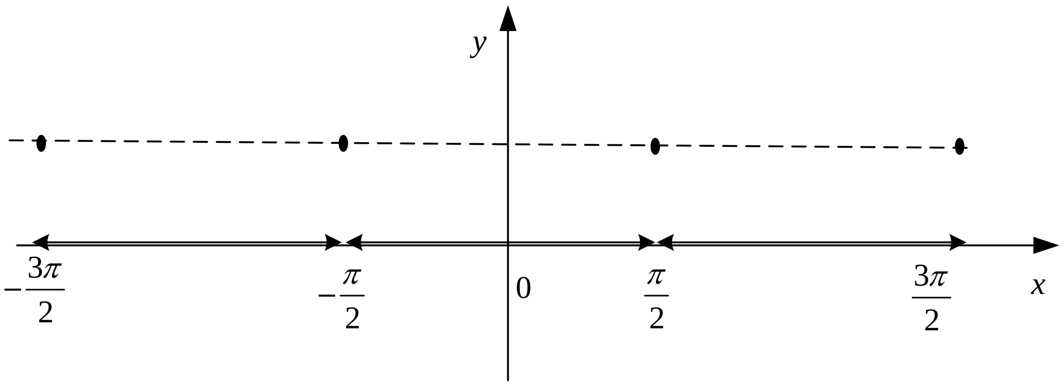
Завдання І туру всеукраїнської олімпіади з математики 2017

1. Побудувати графік функції $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^{2n}x\right)$

Розв'язання.

Якщо $0\le|\sin x|<1,\ y(x)=0$, якщо $|\sin x|=1,\ y(x)=1$

$$y(x)=\begin{cases}1,\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\\ 0,\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$



2. Довести, що будь-який многочлен непарного степеня $n\ge3$ має хоча б одну точку перегину.

Розв'язання.

Функція складена з многочлена непарного степеня, де $n\ge3$ є неперервною і має другу похідну $f''(x_0)=0$. Існують інтервали, на яких вона зберігає знак $f''(x)>0, f''(x)>0$. Точки, при переході через які змінюється знак $f''(x)>0, f''(x)>0$ і будуть точками перегину. Многочлен третього порядку має одну точку, де $f''(x_0)=0$. Многочлени більш високих порядків ($n\ge3$) можуть мати більш ніж одну точку перегину.

3. Довести, що будь-який многочлен непарного степеня $n\ge3$ має хоча б одну точку перегину.

Довести, що якщо усі корені многочлена $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_nx^0$ з дійсними коефіцієнтами - дійсні, то його послідовні похідні $p'(x), p''(x),..., p^{(n-1)}(x)$ також мають лише дійсні корені $(a_0\ne0)$.

Розв'язання.

Достатньо довести, що усі корені $p'(x)$ дійсні. Нехай $a_1<...<a_S$ - корені $p(x)$ і $k_1,...,k_S-$ їх кратність; $k_1+...k_S=n$. Якщо $k_i>1$, то a_i - корінь $p'(x)$ кратності k_i-1, так що сума кратностей коренів $p'(x)$, які містяться серед чисел $a_1,...,a_S$ дорівнює $\left(k_i-1\right)+...\left(k_{S-1}\right)=n-s$. Многочлен $p'(x)$ має, окрім того, дійсні корені

b_i, де $a_i < b_i < a_{i+1}$ $(i = 1, 2..., s-1)$ не менше $s-1$ коренів, а оскільки $(n-s)+(s-1) = n-1$,то інших коренів у $p'(x)$ немає, і усі корені $p'(x)$ дійсні.

4. Нехай $f(x)$ - непарна, диференційована на $(-\infty; +\infty)$ функція. Довести, що $f'(x)$–парна функція. Чи буде вірним обернене твердження?

Розв'язання.

Диференціюючи почленно рівність $f(-x) = -f(x)$, отримуємо $f'(-x) = f'(x)$. В оберненому напрямку твердження невірне, в чому можна впевнитись , взявши,наприклад , $f(x) = x+5$.

5. Задано параметричне рівняння еліпса $x = 2\cos\varphi, y = \sin\varphi, a = 2, \mathrm{b} = 1$- напівосі. Знаючи, що $\rho^2 = x^2 + y^2$, студент обчислює площу еліпса наступним чином:

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \rho^2 d\varphi\right) = 2\int_0^{\pi/2} \left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) d\varphi = \frac{5}{2}\pi .$$

Розв'язання.

Відомо, що $S = \pi ab = 2\pi$. У чому полягає помилка студента?

Оскільки для еліпса $\rho^2 = ab,$

то $S = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \rho^2 d\varphi\right) = 2\int_0^{\pi/2} \left(ab\right) d\varphi = ab\pi$

Згідно з умовою задачі

$S = 2\pi$.

6. Елементи матриці порядку 10 – цілі числа, причому принаймні 92 з них - непарні. Довести, що визначник цієї матриці – парне число.

Розв'язання.

У даній матриці знайдеться принаймні два рядки, що складаються з непарних чисел, різниця цих рядків дасть рядок з парними числами. Якщо знайти визначник за розкладанням цього рядка, то в результаті отримаємо визначник– парне число.

7. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання.

Складемо всі рівняння системи: $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + ... + 3x_{100} = 0$, звідси

$x_1 + x_2 + ... + x_{100} = 0, \qquad (1)$

Перепишемо рівність (1) у вигляді $x_1 + (x_2 + x_3 + x_4) + ... + (x_{98} + x_{99} + x_{100}) = 0.$ Так як сума у кожних дужках рівна *0*, то $x_1 = 0$. Розмірковуючи аналогічно, знайдемо $x_2 + x_3 = ... = x_{100} = 0$, тобто система має тривіальний розв'язок.